ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ V

1. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\frac{3}{10}x^5-2x^4+5x^3-6x^2+7x-13$

ii) $f(x)=6e^x+x^3-3x^2+13x-21$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+6, & x\le 1 \\ x^3-9x^2+15x-3, & x>1 \end{cases}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a^2x^4-4ax^3+6(2a-1)x^2-4x+11,\ a\in\mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0=1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2-4x+6\right)e^{x-1}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(1,f(1)\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1}\ge\frac{x+2}{x^2-4x+6}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4. Έστω μια κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{f(a)+f(\beta)}{2}\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη και ο μιγαδικός $z=f''(0)+2i$. Αν η είναι κοίλη και ο αριθμός $w=\frac{z-i}{z^2}$ είναι φανταστικός, τότε:

i) να βρείτε την $f''(0)$,

ii) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x \ln x - e^x$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα άκρατα.

iii) Να λύετε την ανίσωση: $f\left(2+\frac{f\left(x^2+x+1\right)}{e}\right)+e<0$.

7. Δίνεται πραγματικός αριθμός $\alpha \in (0,1)$ και η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x - x,\ \ x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x - \frac{\lambda x^2}{2} + \frac{3}{2\lambda},\ \ \lambda>0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της τεταγμένης του σημείου καμπής της C_f.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+4}-2}=-4$.

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

10. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2\ln x - x^2+1}{xe^x-2e^x+e}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$

iii) $\lim_{x \to -\infty}\left(x^2 e^x\right)$.

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση .

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{e^x-1}, & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την οποία και να βρείτε.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρει την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0, f(0))$.

iv) Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο 0.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^5+x^3+x,\ \ x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

ii) υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)=0$,

iii) υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2}{3}$$

iv) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(-1, f(-1))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{9}x+2007$,

v) για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x) \leq 9x+6$.

13. Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=2$ και $xf'(x)-f(x)=x$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\ln x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$,

ii) $f(x)=x\ln x+2x,\ x\in(0,+\infty)$,

iii) η εξίσωση $f(x)=2006$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,1003)$,

iv) η συνάρτηση P με $\mathrm{P}(x)=f(x)-e^{x-1}$ έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο και να βρείτε.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{x}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=x+f(-x)$.

iii) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to0}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

v) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

vi) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

vii) Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$.

15. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι:

i) $f(a)\neq f(\beta)$,

ii) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $7f(x_0)=3f(\alpha)+4f(\beta)$,

iii) υπάρχουν $x_1\in(\alpha,x_0)$ και $x_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)>0$,

iv) αν για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει επιπλέον ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{R}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x,\ \ x>0$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για $x>0$.

v) Να δείξετε ότι $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ για $x>1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 2 \\ \left(e^{x-2}-1\right)\ln(x-2), & x>2 \end{cases}$ $\quad a\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε:

α) τα όρια $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)\ln(x-2)\right]$,

β) τον $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Για α=-4, να δείξετε ότι η C_f :

α) δεν έχει ασύμπτωτες,

β) έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες $x_1,x_2\in(-2,3)$ στα οποία οι εφαπτομένες της να είναι παράλληλες στον $x'x$.