ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 8

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ IV

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\eta\mu x}$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - x^2\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+1\right)}-\dfrac{1}{x}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-x\right]$.

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3-5x^2+6}{x^2-4x+3}$

ii) $f\left(x\right)=3x^2-7x+13$

iii) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^5-7x^4+x^3-11}{5x^2-x+2}$

iv) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-x$

v) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-1+\eta\mu x}{x+1}$ και να βρείτε τα σημεία τομής της ασύμπτωτης της f στο $+\infty$ με την γραφική παράσταση της f.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x+\gamma}$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β και γ, ώστε η C_f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=1$ και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2x+3$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x-3$. Να βρείτε:

i) το $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf\left(x\right)-4x^2+\sqrt{x^4+1}}{x^2f\left(x\right)-2x^3+x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}}$,

ii) τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xf(x) - 2x^2 + \lambda x + 13}{\lambda f(x) - 4x + 21} = \dfrac{4}{7}$.

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$. Επίσης η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0, με $f''(0) = 4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$,

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x) + f^2(x) + f(x)}{f(x) \cdot f'(x) + e^x - x - 1}$.

6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη.

i) Να αποδείξετε ότι: $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(x-h)}{h}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} = x + 2$ και $f'(1) = f(1) = 10$, τότε να βρείτε τον τύπο της f.