

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΙΙΙ

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

ii)  $f(x) = x\sqrt{4x-x^2}$

iii)  $f(x) = \frac{4x^2+6x+5}{4x^2+1}$

iv)  $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

v)  $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$

vi)  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 1, & x > 2 \end{cases}.$$

2. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $2f^3(x) + 5f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 11x - 7$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

3. Να αποδείξετε ότι:

i)  $x+2 > (2-x)e^x$  για κάθε  $x > 0$ ,

ii)  $x^2+2 > (2-x^2)e^{x^2}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$(0, \pi)$  και ότι αν  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , τότε:

i)  $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$ ,

ii)  $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{2}{\pi} < \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}$ .

5. Να βρείτε:

i) το σύνολο τιμών της  $f(x) = 8x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,

- ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $8x^2\sqrt{x} - a\sqrt{x} + 1 = 0$ .
6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^3 - 3x^2 - 9x - \lambda = 0$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
7. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:  $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .
- i) Να βρείτε την τιμή του  $k \in \mathbb{R}$  για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
- ii) Για  $k=3$ :
- α) να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,  
 β) να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ ,  
 γ) για κάθε  $\alpha \in (14, 15)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \alpha - 5$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(0, 1)$ .
8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = 2x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- i) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (-1, 1)$ , ώστε  $f'(x_0) = 1$ .
- iii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iv) Να βρείτε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .
- v) Να λύσετε την ανίσωση  $f(\ln x + e^x - e) - f(1 - x) < 0$ .
- vi) Να αποδείξετε ότι  $f(e^{x-1} - x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .