# ΦΥΛΛΆΔΙΟ ΑΣΚΉΣΕΩΝ 6

### ***ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΙΙ***

**1.** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(0)=1,\ f(1)=e,\ f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

**i)** για τη συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)-x$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x)=0$.

**ii)** η εφαπτομένη ευθεία της $C_f$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=f(x_0)\cdot x$.

**2.** Θεωρούμε τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(a)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

**i)** η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a,\beta]$,

**ii)** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)=f(\xi)$,

**iii)** αν για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει ότι $f''(x)\neq 0$, τότε ο αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τον οποίο ισχύει $\xi\cdot f'(\xi)=f(\xi)$ είναι μοναδικός,

**iv)** η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5-80x+\lambda=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-2,2)$.

**4.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)>3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=3x_0+1$.

**5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\nu}=\alpha x+\beta$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$, και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

**6.** Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

**i)** η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 1],

**ii)** η εξίσωση $\varepsilon\varphi x=1-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 1) και να εξετάσετε αν η ρίζα που εξασφαλίσατε είναι μοναδική στο (0, 1).

**7.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu\dfrac{x}{2}=x$ έχει μοναδική λύση τη x=0.

**8.** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ για την οποία ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο Δ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $4^x=3x+1$.

**9.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+8}\cdot\ln\left(x^4+1\right)}{x^6+2}$. Να βρείτε:

**i)** συνάρτηση g, αν $g'(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=3$,

**ii)** συνάρτηση h, αν $h''(x)=f''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, h(0)=-1 και h(1)=3.

**10.** Να βρείτε τη συνάρτηση f αν:

**i)** $f'(x)=6x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(1)=2,

**ii)** $f'(1-2x)=7-12x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(1)=2.

**11.** Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

**i)** η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$ είναι σταθερή,

**ii)** $f(x)=ce^x$, $c\in\mathbb{R}$ (σταθερά).

**iii)** Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-f'(x)=(x-1)^2$ και f(0)=4, να βρεθεί η συνάρτηση f.

**12.** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν την ισότητα $f''(x)=f'''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**13.** Να αποδείξετε ότι:

**i)** $f'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, έτσι, ώστε $f(x)=ce^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

**ii)** Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)=-g(x)$ και $h'(x)=-h(x)$ και η h δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε g=ch.

**14.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει $P(x)+P(y)=P(x+y)-xy-1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $P'(0)=-1$.