ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Ι

1. Έστω η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[-1,1]$ και για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-\sqrt{x+1}}{x}=0$. Να αποδείξετε ότι: $f'(0)=1$ και $f''(0)=\dfrac{1}{2}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f' να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

i) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x\cdot f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $g'(0)=2f'(0)$.

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$(1+xf(y))\cdot f(x)=(1+yf(x))\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)-f(y)=-(x-y)\cdot f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y>0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=0$,

ii) $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{h-1}=x_0\cdot f'(1)+f(x_0),\quad x_0>0$

iii) η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=f'(1)+\dfrac{f(x)}{x},\ x>0$.

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

i) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f'(x)$, $f''(x)$ και $f'''(x)$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f, ώστε να είναι $f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=2$.

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x+\beta\cdot\eta\mu x,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f.

ii) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f''(x)+4f'(x)+4f(x)=25\eta\mu x$ να αποδείξετε ότι α=-4 και β=3.

7. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $f''(x)+f'(x)+f(x)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

ii) $f'''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ το οποίο έχει δύο διαφορετικές ρίζες. Να αποδείξετε ότι:

i) $P'(\rho_1)=\alpha(\rho_1-\rho_2)$ $\quad$ $P'(\rho_2)=\alpha(\rho_2-\rho_1)$

ii) $\dfrac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2}{P'(\rho_2)}=\dfrac{1}{\alpha}$.

9. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(\ln\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(f(x))-\ln f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\sqrt{a}\cdot\dfrac{f'(a)}{f(a)}$.

10. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=a_1\eta\mu x+a_2\eta\mu(2x)+\ldots+a_\nu\eta\mu(\nu x),\quad a_1, a_2, \ldots, a_\nu\in\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)|\leq|\eta\mu x|$, να αποδείξετε ότι:

i) $|f'(0)|\leq 1$

ii) $|a_1+2a_2+\ldots+\nu a_\nu|\leq 1$.

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $|f'(0)|=1$, για την οποία για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$. Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις: $f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)$ και $f'(x+y)-f'(x-y)=0$.

ii) $f'(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=0$.

i) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iii) Αν $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_h στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ είναι παράλληλες.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\left|f(x)-\ln x\right|\le(x-1)^2$ για κάθε x>0. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(1,f(1)\right)$.

14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, με $f'(0)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ και η κάθετη σ' αυτή στο Μ τέμνουν τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία Α και Β με άθροισμα τετμημένων $2x_0$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές.

15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=3cm, ΑΓ=4cm και η γωνία $\widehat{A}$, την οποία συμβολίζουμε με θ(t), αυξάνεται με ρυθμό 3° ανά sec.
i) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν Ε(t) του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με Ε(t)=6ημθ(t).
ii) Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού του τριγώνου, τη στιγμή t_0 που η γωνία $\widehat{A}$ είναι 60°;

16. Μια κολώνα της ΔΕΗ με λάμπα φωτισμού έχει ύψος h=20 m. Από το ίδιο ύψος και σε απόσταση 2 m από την κολώνα αφήνεται να πέσει μια μπάλα. Σε χρόνο t η μπάλα διανύει διάστημα ίσο με $S(t)=5t^2$.

i) Να αποδείξετε ότι η σκιά σ(t) της μπάλας (με αρχή μέτρησης τη βάση της κολώνας) ισούται με $\sigma(t)=\dfrac{8}{t^2}$.

ii) Με ποια ταχύτητα κινείται η σκιά της μπάλας στο έδαφος ένα δευτερόλεπτο μετά τη πτώση της;