ΦΥΛΛΆΔΙΟ ΑΣΚΉΣΕΩΝ 4

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. **i)** Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $x^2 f(x) = \eta\mu^2 2x$ να υπολογίσετε το $f(0)$.

ii) Έστω μια συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu 2x - x^2 \le xg(x) \le \eta\mu 2x + x^2$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ και **β)** το $g(0)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)\begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ ax+\beta, & 0 < x < 1, \quad a,\beta \in \mathbb{R} \\ 1 + x\ln x, & x \ge 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα α και β έτσι, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (a^2+\beta^2)\ln(x-5-e) + 2(a+1)e^{5-x}, & x \ge 5, \quad a,\beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

i) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$.

ii) Να βρεθούν τα α και β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

iii) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (ii) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

4. Έστω f συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f αντιστρέφεται,

ii) η αντίστροφη της f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 4 και $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5 - f(x)}{6 - x} = 4$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(-1) = -3$

ii) η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f(0)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$,

ii) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε είναι συνεχής $\mathbb{R}$.

7. Έστω f συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

i) Αν είναι $f(a)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(a,\beta)$, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(a)+f(\beta)}{2}$.

ii) Αν είναι $f(a)\neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$, ώστε $\dfrac{f(x_0)}{x_0-a}=\dfrac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+7x-5$.

i) Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1,

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Αν είναι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-3}{x-1}, & x\neq 1\\ a^2+3a, & x=1\end{cases}$, να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

iii) α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

β) Να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι $f(x_0)=7$.

γ) Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $(\kappa,\kappa+1)$, μέσα στο οποίο θα ανήκει αυτό το x_0, όπου κ ακέραιος.

iv) Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^4}$,

β) τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε $f(\lambda^3-5\lambda)=f(2\lambda-6)$.

9. Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(a)=f(\beta)$ και έστω κ το μέσον του $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left[0,\dfrac{\beta-a}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f(x_0+a)=f(x_0+\kappa)$.

10. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to[0,1]$ τέτοιες, ώστε $f\circ g=g\circ f$ και g γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $(f\circ g)(x_0)=g(x_0)$.

11. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x>0$ ισχύει η σχέση $g(x)=2xe^{f(x)}$.

i) Αν είναι $g(1)<2$ και $g(3)>6$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

ii) Να εξετάσετε αν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για την εξίσωση $f(x)=0$, όταν $g(1)=\frac{1}{2}$ και $f(3)>6$.

12. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει: $x^2+f^2(x)=4$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

i) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της f.

13. A) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ που είναι 1-1 και την αντίστροφή της $f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R}$.

i) Τι εκφράζει γεωμετρικά η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$, όπου $x\in A$;

ii) Να αποδείξετε την ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x,\ \ x\in A$.

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+6x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται σε ένα μόνο σημείο $M(x_0,y_0)$ τέτοιο, ώστε το x_0 να ανήκει στο διάστημα $(-2,0)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το σημείο Μ.

iv) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^4+1}$.

14. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$xf(x)+2x^4=3x-\eta\mu x,\quad x\in\mathbb{R}.$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3=3-\frac{\eta\mu x}{x}$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

15. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=x-3i+\frac{2i}{x-i},\quad x\in\mathbb{R}.$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε ο μιγαδικός z να είναι φανταστικός.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\mathrm{Re}(z)\cdot(x^2+1)$.

iii) Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases}\mathrm{Re}(z)\cdot(x^2+1), & x\geq 1\\ \mathrm{Im}(z)\cdot(x^2+1)+a, & x<1\end{cases}.$$

16. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[-2,2]$ με $f(-2)=-2$ και $f(2)=2$. Θεωρούμε και τον μιγαδικό $z=a+\beta i,\quad z\neq 0, a,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right|\leq 2$.

ii) Αν $z+\frac{1}{z}=k,\ k\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}(z)=0$ ή $|z|=1$.

iii) Να αποδείξετε ότι όταν $|z|=1$, η εξίσωση $f(x)=k$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.