

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

### ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x-\lambda\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} + \alpha x + \beta}{x-1}$ ,  $x \neq 1$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$ . Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -3$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x^2 - 3\lambda x + 9}{x-3}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $x \neq 3$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \mu \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 3$  και  $\mu = 3$ .

ii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 9}{f^2(x) - 2f(x) - 3}$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 2$ .

Να αποδείξετε ότι:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 12}{x^2 + x - 2} = \frac{14}{3}$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$  και

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2} = 2$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $f(1) = 0$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1.$$

6. Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P(x)$ , με  $P(0) = 1$ . Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|xP(x) + 1| - |xP(x) - 1|}{x}.$$

7. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ .

i) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - f^2(x)| - 3f(x)}{\sqrt{f(x)} - 2}$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(x+1) = f(x) + 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 4x - 2] = -2$ , να υπολογίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Να υπολογίσετε τα

όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - \eta\mu x}{5x - \eta\mu x}$ .

10. i) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(-x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

ii) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , τότε να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = l$  και να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

11. Έστω  $f$  και  $g$  συναρτήσεις τέτοιες, ώστε να ισχύει  $|g(x)| \leq |f(x)|$  για κάθε

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Αν είναι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 0.$$

12. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\nu^2 x}{x\eta\mu 2x}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\sigma\nu x}}{x^2}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$$

13. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο  $n$ , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu nx}{x} = 36.$$

14. Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l}{f(x) + l} = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

15. Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2x \cdot f^2(x) + 3x^2 \cdot f(x) = 6x^2 \cdot \eta\mu(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν είναι γνωστό ότι}$$

υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  και είναι ίσο με τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ , τότε:

i) να υπολογίσετε το  $\alpha$ ,

ii) να βρείτε το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 = 0$ .

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\eta\mu(x-2)}{1 - \sqrt{5-x^2}}$ , με  $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] - \{-2, 2\}$ . Να

αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2.$$

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 3}{x-1}$ , με  $x \geq 0$  και  $x \neq 1$ . Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

$$\text{i) Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+x)}{x^2+x} = 1.$$

$$\text{ii) Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+x)}{x^2-x} = 1.$$

19. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , όπου  $l \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) = l$

ii)  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$ .

20. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l$  και

$2f^3(x) - x^2 f(-x) = 3x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = -l$

ii)  $2 \left( \frac{f(x)}{x} \right)^3 - \frac{f(-x)}{x} = 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$

iii)  $l = 1$ .

21. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \frac{x^2 - \lambda x}{|x-1|}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $x \neq 1$ .

i) Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - \lambda x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$ .

ii) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)+1}{|f(x)-1|}$ .

23. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sin x} = 2$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

24. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \frac{4x^2 + ax + 3}{4x + 1} + ax + \beta$ , με  $a, \beta \in \mathbb{R}$  και  $x > 0$ .

i) Να αποδείξετε ότι αν  $a > -1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , ενώ αν  $a < -1$ , τότε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

ii) Για  $a = -1$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

25. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \eta\mu 2x$ .

26. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 2) = 0$ .

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + x}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 1}$ .

27. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^2 + 1) = 2$ .

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x^2}{f(x) - x}$ .

28. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

29. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = x^2 \cdot \left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \neq 0$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

30. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu x}{1 + x \cdot \left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)}$ .

31. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

32. Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$ ,  $x \neq 0$ .

i) Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

ii) Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .

33. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot f^2(x) + g^2(x)) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot f^2(x)) = 0$

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .