

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 10

## ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i)  $\int_0^1 (x-1)^2 (3x+2) dx$

ii)  $\int_1^4 (\sigma\upsilon\nu(\pi x) + \sqrt{x}) dx$

iii)  $\int_2^5 \frac{3x+1}{x^2+2x-3} dx$

iv)  $\int_2^4 \frac{2x^3+2x^2-3x+5}{x^2+x-2} dx$

v)  $\int_0^\pi (2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x) dx$

vi)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} dx$

vii)  $\int_0^\pi \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x} dx$

viii)  $\int_{-1}^3 f(x) dx$  όπου  $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leq 1 \\ 3x^2-6x+8, & x > 1 \end{cases}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i)  $\int_1^2 (3x^2-4x) \ln x dx$

ii)  $\int_0^2 x^2 e^x dx$

iii)  $\int_0^\pi x \eta\mu 2x dx$

iv)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i)  $\int_1^{e^\pi} \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} dx$

$$\text{ii) } \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$\text{iii) } \int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx$$

$$\text{iv) } \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^\pi \sigma\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx$$

$$\text{ii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\nu^3 x dx$$

$$\text{iii) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{θέστε } x = \eta\mu u)$$

$$\text{iv) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (\text{θέστε } x = \epsilon\phi u)$$

$$\text{v) } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx \quad (\text{θέστε } x = \epsilon\phi u)$$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_{-3}^x \sqrt{t^2 - t - 2} dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και την παράγωγο της  $F$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_{-1}^{\ln(x-1)} \frac{e^t}{t} dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και την παράγωγο της  $F$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_{x-1}^{x^2-4} \frac{\eta\mu t}{t} dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και την παράγωγο της  $F$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_3^{2x} x \ln(t^2 - 4) dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και την παράγωγο της  $F$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x t \cdot \eta\mu(x-t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $F$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την  $F'$ .

10. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x e^{t^2} dt}{\eta \mu^2 x}$ .

11. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $\int_0^1 \left( \int_1^t e^{y^2} dy \right) dt$ .

12. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_{2-x}^{x+\frac{1}{2}} \ln t dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και να μελετήσετε την  $F$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

13. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^{2x} \left( \int_1^{1+t} \frac{e^{u^2} - e}{u^2 + 1} du \right) dt$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $F$  και να μελετήσετε την  $F$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , με:  $f(x) = \int_1^{e^{\phi x}} \frac{1}{t(t^2+1)} dt + \int_1^{\sigma \phi x} \frac{t}{t^2+1} dt$ .

i) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

ii) Να βρείτε το  $I = \int_1^3 \frac{1}{t(t^2+1)} dt + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t}{t^2+1} dt$ .

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) = 2 + \int_1^x \frac{f(t)}{x} dt \quad \forall x > 0. \text{ Να αποδειχθεί ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της } f.$$

16. Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  για την οποία ισχύει  $\int_0^1 f(t) dt = 3$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

ii) η εξίσωση  $\int_0^x f(t) dt = 2 - x^2$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $(0, 1)$ .

17. Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\int_1^2 f(x) dx = 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε:  $\int_1^\xi f(t) dt = \xi f(\xi)$ .

- 18.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(4) = 6$ ,  $f(5) = 9$  και  $f'(x) > -2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση:

$$g(x) = \int_1^x f(t) dt + x^2 - 5x, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε:}$$

- i) υπάρχει  $\xi \in (2, 3)$  τέτοιο, ώστε:  $\int_1^3 f(t) dt - \int_1^2 f(t) dt = f(\xi) + 2\xi - 5$ ,  
ii) η  $g$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ ,  
iii)  $5 < \int_4^5 f(t) dt < 10$ .

- 19.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\int_2^x xf(t) dt + x^2 \geq 2 \ln(x-1) + 4 \text{ για κάθε } x > 1. \text{ Να βρείτε την τιμή } f(2).$$