ΦΥΛΛΆΔΙΟ ΑΣΚΉΣΕΩΝ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:
   i) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$
   ii) $f(x)=\ln(x-5)+2x-12$
   iii) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$
   iv) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-|x|}}{|x+1|-1}$
   v) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με: $f(x)=\text{ημ}2x$. Να βρείτε μια περίοδο της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με: $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$. Να αποδείξετε ότι είναι άρτια.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:
   i) $f(-x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
   ii) η f είναι περιττή.

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
   i) $f(0)=1$,
   ii) η f είναι άρτια.

6. Έστω η συνάρτηση $f:[-2,\,2]\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$. Αν για τον πραγματικό αριθμό y ισχύει $f(x)=y$, να αποδείξετε ότι: $-4\le y\le 0$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f.

7. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

i) Να λύσετε ως προς x την εξίσωση $f(x)=y$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με: $f(x)=e^{\sqrt{x}}-1,\ x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν είναι $y\ge 0$, τότε η λύση της εξίσωσης $f(x)=y$, ως προς x, είναι ο αριθμός $x=\ln^2(1+y)$,

ii) το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,\,+\infty)$.

9. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,\,g$ με τύπους $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$ και $g(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{\beta}{x+1},\ a,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι οι $f,\,g$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

ii) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β ώστε οι συναρτήσεις $f,\,g$ να είναι ίσες.

10. Οι συναρτήσεις $f,\,g$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x\in A$ ισχύει η σχέση: $(f+g)(x)\cdot\big((f+g)(x)-2\big)=2\big((f\cdot g)(x)-1\big)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)=1$ για κάθε $x\in A$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\,g$ με τύπους $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=x+1$.

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[-2,\,2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι το διάστημα $[-3,\,1]$.

iii) Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ g$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με $g(x)=x+1$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $(g\circ f)(x)=e^{x+2}+1$. Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x,\ x>0$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f\left(g(x)\right)=3x-2$. Να βρείτε τον τύπο της g.

14. Έστω η συνάρτηση $g(x)=2x-1$ και η συνάρτηση f ώστε να ισχύει: $(f\circ g)(x)=x^2-x$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)$.

15. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση $(f\circ f)(x)=x^2+\frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=f^2(x)+\frac{1}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

16. Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\mapsto(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $h(x)=\ln\left(f(x)+g(x)\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

17. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=2-\frac{1}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ $x\in[-1,1]$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ για κάθε $x\in[-1,1]$,

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+2(x-1),\ x>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=0$,

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Τέλος, να λύσετε την εξίσωση: $\ln x+2(x-1)=0$.

20. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με

$f(x)=a^x+(a-1)x-2a+1,\quad a>1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=0$,

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$.

21. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x+x,\quad x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $e^x+x<1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{3^x+4^x}{5^x}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, να λύσετε την ανίσωση: $3^x+4^x>5^x,\quad x\in\mathbb{R}$.

23. Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $(f\circ f)(x^2-x)<(f\circ f)(2x-2)$.

24. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-4x+3$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=(x-2)^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) η ελάχιστη τιμή της f είναι το -1.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=e^x+e^{-x},\quad x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=2$

ii) $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

iii) η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2.

26. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=4$

ii) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$, για κάθε $x\geq 0$,

iii) η μέγιστη τιμή της f είναι το 4.

27. Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\mapsto(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση: $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}-1$ είναι γνησίως μονότον στο $\mathbb{R}$,

ii) η εξίσωση $f(x)+g(x)=f(x)g(x)$ έχει το πολύ μία λύση στο $\mathbb{R}$.

28. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο: $g(x)=f(x)+f(2x-1)-2f(2-x),\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{f(x)+f(2x-1)}{2}>f(2-x)$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(t)=t^3+t-8,\ t\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^3+x=y+8 \\ y^3+y=x+8 \end{cases}$.

30. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 3x+7, & x\leq 1 \\ 2x^2+1, & x>1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\sqrt{3})=7$,

ii) η f δεν είναι 1-1.

31. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\dfrac{1}{3}\left[(x-1)^3+1\right]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) η f είναι 1-1.

Στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

32. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 1+\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ii) Να βρείτε την f^{-1}.

33. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ και $g(x)=1-\ln x$ αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

iii) Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

34. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2+(x-2)^2,\quad x\ge 2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

35. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση: $f\big(f(x)\big)+f(x)=2x$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(x^2\right)+(f\circ f)(x)=2x$.

36. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+x-8,\ \ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει μοναδική λύση την $x=2$.

37. Έστω $f,g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ συναρτήσεις 1 – 1 με τη g περιττή, για τις οποίες ισχύει η σχέση $(g\circ f)\left(x^2+1\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι:

i) και $g^{-1}(0)=0$,

ii) f(1)=0.

38. Έστω $f,g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ συναρτήσεις οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση: $(g\circ f)(x)=x+1$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(g(x)+x^2-2x\right)=f\left(g(x)-1\right)$.

39. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $x,y\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι περιττή.

ii) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

40. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ τέτοιο ώστε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $|f(x)-f(y)|\le\lambda|x-y|$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+f(x),\quad x\in\mathbb{R}$, είναι 1-1.

41. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$e^{f(x)}+f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

β) να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f\left(x^2+2x\right)\right)<f\left(f\left(x+2\right)\right)$.

42. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha,\beta>0$ να αποδείξετε ότι: $f(\alpha+\beta)>\dfrac{\alpha\cdot f(\alpha)+\beta\cdot f(\beta)}{\alpha+\beta}$.

43. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=2^x+2^{-x}$ και $g(x)=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2\geq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2^x+2^{-x}=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$.

44. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+\sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $f\left(\dfrac{1}{4}\right)+2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{4}\right)=2$.

45. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)+3f(x)=x$;

46. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

47. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=\sqrt{2}+\sqrt{2-x},\ x\leq 2$ και $g(x)=\sqrt{x+1}+1,\ x\geq -1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=g(1)$,

ii) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$, ενώ η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f,g στο διάστημα $[-1,2]$.

48. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f\left(\frac{x-y+2f(x)+f(y)}{3}\right)=x+3y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) $f\left(\frac{x+2f(x)}{3}\right)x, \quad x\in\mathbb{R}\ x,y\in[0,1]$

iii) $f(f(x))=\frac{3x-f(x)}{2}, \quad x\in\mathbb{R}$ iv) $f(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}$.

49. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$, για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\le|2^x-2^y|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

50. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)-2)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ι) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ιι) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ιιι) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης f^{-1} της f συναρτήσει του τύπου της .

ιν) Να αποδείξετε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.