ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Δίνεται η εξίσωση: $\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 2\eta\mu\theta \cdot z + 5 - 4\eta\mu^2\theta = 0$ (1) με $\theta \in (0,\pi)$.

i) Να λυθεί η (1).

ii) Να αποδειχθεί ότι καθώς ο θ διατρέχει το διάστημα $(0,\pi)$,οι εικόνες των ριζών της (1) κινούνται σε μια υπερβολή.

2. Έστω ο μιγαδικός z, ώστε $3z\bar{z}^7 + 2\bar{z}z^7 = 5$. Να δείξετε ότι:

i) $z\bar{z}^7 = 1$

ii) $|z| = 1$

iii) $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $z^\nu = 3+4i$ και $z^{\nu+1} = 2+11i$.

i) Να βρείτε τους ν, z.

ii) Να βρείτε τους $\mu \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει: $z^\mu = (-1+2i)^\mu$.

4. Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1 z_2 \neq -4$.

i) Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1+z_2}{4+z_1 z_2}$ είναι πραγματικός.

ii) Αν δίνεται ότι $\mathrm{Im}(z_1)\cdot \mathrm{Im}(z_2) \leq 0$, να δείξετε ότι $-\dfrac{1}{2} \leq w \leq \dfrac{1}{2}$.

5. Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν $\left(zi + \bar{z}\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}$ και $|z| = 1$.

Να δείξετε ότι:

i) $z^{12}=1$

ii) $z^{288}+2z^{150}+1=0$.

6. Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $|z_1|=|z_2|=2$ και $z_1^2+z_2^2\neq 0$. Έστω και ο μιγαδικός $w=\dfrac{2z_1z_2}{z_1^2+z_2^2}$. Να δείξετε ότι:

i) $\overline{z_1}=\dfrac{4}{z_1}$ και $\overline{z_2}=\dfrac{4}{z_2}$,

ii) $w\in\mathbb{R}$,

iii) $|w|\geq 1$ και

iv) αν w=2, τότε το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών 0, z_1 και z_2 είναι ισόπλευρο.

7. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}+...+\dfrac{1}{z-10}=1$ να δείξετε ότι $z\in\mathbb{R}$.

8. Δύο μικρές μύγες Α και Β κινούνται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο και είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα, ώστε να ισχύει συνεχώς $z_1=\dfrac{4+3i}{5}z_2$. Να αποδειχθεί ότι:

i) Οι δύο μύγες Α και Β ισαπέχουν συνεχώς από την αρχή των αξόνων.

ii) Αν η μύγα Α κινείται πάνω στον ορισμένο κύκλο (Κ, ρ), τότε και η μύγα Β κινείται πάνω σε έναν κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

9. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \qquad (1)$$
$$|w-5\overline{w}|=12 \qquad (2)$$

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.

ii) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

iii) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

iv) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\le|z-w|\le 4$.

10. Αν η εξίσωση $z^2+az+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έχει ρίζες τους μιγαδικούς $3+2i$ και z_2, τότε:

i) Να βρείτε τους α, β και z_2.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο μιγαδικός είναι πραγματικός.

iii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης

$f(z)=|z-z_1|+|z-z_2|,\ z\in\mathbb{C}$.

11. Έστω οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί z_1 και z_2 και ο φανταστικός αριθμός $w=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Ο μιγαδικός w^{2004} είναι θετικός ή μηδέν.

ii) Οι μιγαδικοί z_1 και z_2 έχουν ίσα μέτρα.

12. Έστω $f(z)=\dfrac{3\operatorname{Re}(z)+4\operatorname{Im}(z)}{z}$, $z\in\mathbb{C}-\{0\}$.

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z\neq 0$ για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=3$.

ii) Αν $\operatorname{Re}(z)=\lambda\operatorname{Im}(z)$, τότε να εκφράσετε το $|f(z)|$ ως συνάρτηση του λ και να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του.

13. Έστω a, b, c τρεις μιγαδικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός και διαφορετικοί ανά δυο. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1=\dfrac{a}{b-c}$, $z_2=\dfrac{b}{c-a}$ και $z_3=\dfrac{c}{a-b}$. Να δείξετε ότι αν οι z_1, z_2 είναι φανταστικοί τότε και ο z_3 είναι φανταστικός. Στην περίπτωση αυτή, αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των a, b, c στο μιγαδικό επίπεδο, να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

14. Να δειχθεί ότι για κάθε z_1 και $z_2\in\mathbb{C}$ με ισχύουν:

i) $2\left[|z_1z_2|-\operatorname{Re}(z_1z_2)\right]=|z_1-\overline{z}_2|^2-(|z_1|-|z_2|)^2$

ii) $\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}(z_1)|=\sqrt{|z_1|^2-\operatorname{Re}(z_1)^2}$.

15. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο και ισχύει $z_3=\dfrac{1}{2}iz_1+\left(1-\dfrac{1}{2}i\right)z_2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

16. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Να δείξετε ότι: $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)+\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)+\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)\geq -\dfrac{3}{2}$.

17. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο ακέραιος $\nu > 1$, ώστε $z_1^{\nu} = 2+i$ και $z_2^{\nu} = 1+2i$.

i) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.

ii) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, όπου w ο μιγαδικός του ερωτήματος **i)**, δεν είναι φανταστικός.

iii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(c) = |c+w| + |c-w|$, όπου $c \in \mathbb{C}$.

18. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho \neq 1$, να εξετάσετε αν η εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ κινείται σε έλλειψη.