ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. i) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, ώστε: $\ln x_0 + x_0^2 = 0$

ii) Δίνεται ο μιγαδικός $z = \ln x + xi,\ x > 0$.

a) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση k της εικόνας του z από την αρχή O των αξόνων ως συνάρτηση του x_0.

b) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

c) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\ln x_0, x_0)$ είναι κάθετη στην ευθεία OA.

d) Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z-2k}{2z-k}$ βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο C κέντρου O(0, 0) ή στο εσωτερικό του.

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = \left| z\int_1^x \ln t\, dt + w\int_3^x \ln t\, dt \right|,\ x \in [1,3]$ όπου $z,\ w$ μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας 1.

i) Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f.

iii) Αν $z = i$ και $w = i^3$, να βρείτε τον τύπο της f.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{1}{t+1-x}\, dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{2-x},\ x \in (-1,2)$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iv) Να βρ $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t)$ είτε τις ασύμπτωτες της C_f.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, και έστω $S(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ με $S(1) = 1$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την ευθεία που συνδέει την αρχή

O(0, 0) και το σημείο $(\alpha, f(\alpha))$, την ευθεία που συνδέει την αρχή O(0, 0) και το σημείο $(2\alpha, f(2\alpha))$ και την καμπύλη $y=f(x)$ είναι 3S(α) για κάθε α>0.

i) Να εκφράσετε το $S(x)$ και το $g(x)=f(x)-2f(2x)$ ως συνάρτηση του x.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $S(2)=1-\frac{4}{\xi^5}$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται από την Cg την εφαπτομένη της g στο σημείο (1,g(1)), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=t$.

iv) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)$.

5. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,-1)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=0,\ f'(0)=1$ και $f''(x)=(f'(x))^2$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$.

i) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\ln(1-x)$.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα- κυρτά.

iv) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες $x'x,\ y'y$ και την ευθεία $x=1-e$.

6. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(1)=2$ και $f'(x)+f(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+e^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$, ισχύει:

$(\alpha-\beta)e^{1-a}<e^{1-\beta}-e^{1-a}<(a-\beta)e^{1-\beta}$.

7. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=1+ia^x,\ w=x+1+i$ και η συνάρτηση $f(x)=|z|^2x+|w-1|^2$ με $x\in\mathbb{R}$ και α>0. Αν ισχύει $|z-\overline{w}|\le|\overline{z}+w|$, τότε:

i) να δείξετε ότι $\alpha=e$,

ii) να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

iii) να δείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες,

iv) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$,

v) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$

και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\alpha+i\beta$ και $z_2=f(a)+if(\beta)$, με $f(\beta)\neq 0$, ισχύει $|z_1-iz_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$ να δείξετε ότι:

i) $\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$, ii) $af(\beta)=\beta f(\alpha)$,

iii) η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β), όταν $\alpha<0<\beta$,

iv) η C_f, έχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη που περνάει από την αρχή των αξόνων, όταν $\alpha\beta>0$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο [α, β] και ισχύει $f(\alpha)=0=f(\beta)$. Αν οι F, G είναι παράγουσες των f, g αντίστοιχα στο [α, β] και $H(x)=G(\beta)F(x)-F(\beta)G(x)$ να δείξετε ότι:

i) η H έχει δεύτερη παράγωγο στο [α, β],

ii) υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{H}'(x_1)=0$,

iii) υπάρχει $x_2\in(\alpha,x_1)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{H}''(x_2)=0$,

iv) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx=g'(\xi)\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $\begin{cases} ae^x-x+1, & x\leq 0 \\ x^2\ln x+\beta, & x>0 \end{cases}$.

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Για α=1 και β=2:

α) να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0,f(0))$,

β) να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f,

γ) να δείξετε ότι $f(x)>\frac{3}{2}$ για x>0,

δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες x=-1 και χ=1.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν:

$f'(0)=1$

$f(x+y)=f(x)f(y)e^{2xy}, \quad x,y\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(0)=1$,

ii) $f'(x)=(2x+1)f(x),\ x\in\mathbb{R}$,

iii) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,

iv) $f(x)=e^{x^2+x},\ x\in\mathbb{R}$

v) η C_f δεν έχει ασύμπτωτες,

vi) η C_f δεν έχει σημεία καμπής,

vii) η ευθεία $y=3x+5$ τέμνει τη C_f σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$,

viii) $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\geq x^2+x+1,\ \ x\in\mathbb{R}$,

ix) $E\geq\dfrac{11}{6}$, όπου E το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

12. i) Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 να δείξετε ότι: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

ii) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν: $z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ να δείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

iii) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 ισχύουν: $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ να δείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

13. Αν $z\in\mathbb{C}$ και $|z-4+3i|\leq 1$, τότε:

i) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο,

ii) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$,

iii) να δείξετε ότι $|z+8-2i|\geq 12$.

14. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=a^x+x+1,\ a>1$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $a^{x^2-9}-a^{x-3}<6+x-x^2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $(0,+\infty)$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

i) να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=2$,

ii) να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1),\ x>1$,

iii) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

16. Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{f(t)}}dt+1,\quad x\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=-e$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{-e}^{0}\frac{1}{1+e^{f(x)}}dx=1$.

v) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f^{-1}(x)+3\right)-\int_{-e}^{0}\frac{1}{1+e^{f(x)}}dx<\int_0^3\frac{1}{1+e^{f(x)}}dx$.

17. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=5x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(2)=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης f^{-1}.

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε.

v) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(1-x)=x$.

vi) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx=\frac{14}{5}$.