ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο δύο κάθετες μεταξλυ τους χορδές του ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΟΔ}=2\overrightarrow{ΟΚ}$

β) $\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΚΒ}+\overrightarrow{ΚΓ}+\overrightarrow{ΚΔ}=2\overrightarrow{ΚΟ}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{u}=\left(x^2+1,\, y^2+1\right)$ και $\vec{v}\left(2y,\, 2x\right)$. Αν $\vec{u}=\vec{v}$, να βρείτε:

α) τις τιμές των x και y,

β) τον συντελεστή διεύθυνσης του,

γ) τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ με τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x+2y+3=0$.

α) Ποια μορφή έχει κάθε ευθεία παράλληλη με την (ε);

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4τ.μ.

4. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda-1)x+(\lambda-1)y+4-8\lambda=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$,

β) η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνεται κύκλος $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=50$ και το σημείο $\mathrm{M}(-3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ βρίσκεται μέσα στον κύκλο (C).

β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ του κύκλου, η οποία έχει μέσο το σημείο Μ.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.

6. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2+(\lambda-2)x-2(\lambda+2)y+13\lambda-20=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να αποδείξετε ότι αυτό κινείται σε μια ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται.

γ) Να αποδείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

7. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2 = 4x$ και ένα σημείο της $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$.

α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.

β) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του Α ως συνάρτηση της τεταγμένης του.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος ΑΕ.

δ) Να βρείτε την απόσταση d του Κ από τον άξονα $y'y$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{KE} = \dfrac{\beta^2 + 4}{8}$.

στ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΑ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

8. Δίνεται η εξίσωση $(C): 8x^2 + 9y^2 = 72$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (C) παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες, το μήκος του μεγάλου άξονα και τη εκκεντρότητα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $\mathrm{M}\left(1, \dfrac{8}{3}\right)$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν έτσι, ώστε η εφαπτομένη στο Ν να είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της (C) στο σημείο Μ.

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της (C) οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): 3x + y + 5 = 0$.

ε) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της (C) οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Sigma(6, -1)$.

9. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία είναι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \dfrac{\pi}{4}$.

Να βρείτε:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

β) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}$,

γ) τη γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{\alpha}$.

10. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{\beta}$, έτσι, ώστε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{6}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\beta}\right|=1$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ, το μέσο Ν του ΑΜ και το σημείο Ε της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε ΓΕ=2ΕΑ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\gamma}$, τότε:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{NE}}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$,

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ν και Ε είναι συνευθειακά,

γ) να αποδείξετε ότι ΒΝ=3ΝΕ.

12. Δίνεται η εξίσωση $3x+2y+7+\lambda(x-2y+5)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές διέρχονται από ένα σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών: $(\varepsilon):5x-3y+10=0$ και $(\eta):5x-3y+6=0$.

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με Α(-2, 2), Β(-1, 4) και Γ(5,-4).

α) Να βρείτε την τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος υ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στη πλευρά ΒΓ.

15. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(1, 7) και η διάμεσος ΓΜ έχει εξίσωση $9x+7y-28=0$. Η ευθεία $(\varepsilon):x+3y-2=0$ διέρχεται από το Β και τέμνει την πλευρά ΑΓ σε ένα σημείο Ε, ώστε ΑΕ=2ΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι Β(-1, 1).

β) Αν Γ(γ, δ), να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}\left(\dfrac{1+2\gamma}{3},\dfrac{7+2\delta}{3}\right)$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(8,-7)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και το μέτρο του $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ και τον συντελεστή διεύθυνσης του ύψους ΑΔ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

δ) Αν Γ(5, 1), να βρείτε τις κορυφές Α και Β.

17. Ένας κύκλος (C) εφάπτεται στον κύκλο (C_1): $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ στο σημείο του Β(0, 5) και διέρχεται από το σημείο Α(2, 7). Αν Μ(α, β) είναι το κέντρο του κύκλου (C) τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\beta=-3\alpha+5$,

β) να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=7$

γ) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C).

18. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^2}{k+2}+\dfrac{y^2}{3-k}=1,\ \ k\in\mathbb{R}-\{-2,3\}$ (1).

α) Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β) Για ποιες τιμές του k η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη;

γ) Αν $k\in\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η έλλειψη που προκύπτει από την (1) έχει τις εστίες της πάνω στον άξονα $y'y$,

ii) να υπολογίσετε την τιμή του k, ώστε η εκκεντρότητα της έλλειψης (1) να είναι ίση με $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.