ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

ΕΛΛΕΙΨΗ

1) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο Ε(1, 0) ισούται με το μισό της απόστασής τους από την ευθεία (η): $x-4=0$. Να βρεθούν οι εστίες της γραμμής που θα προκύψει.

2) Δίνεται η έλλειψη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \ \alpha>\beta$. Από τυχαίο σημείο Ρ της ευθείας (δ): $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ φέρνουμε την εφαπτομένη ΡΜ στην έλλειψη. Αν Ε(γ, 0) είναι εστία της έλλειψης, να αποδειχθεί ότι $EM\perp EP$.

3) Έστω η έλλειψη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \ \alpha>\beta$ με μεγάλο άξονα ΑΑ΄ και $M(x_0,\ y_0)$ ένα τυχαίο σημείο της. Οι ευθείες Α΄Μ και ΜΑ τέμνουν την

ευθεία (δ): $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Ε είναι η πλησιέστερη εστία στην ευθεία (δ), να αποδειχθεί ότι $\Gamma E\perp E\Delta$.

4) Δίνεται η έλλειψη (C): $4x^2+9y^2=36$ και το σημείο Μ(-1, 1).

i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

ii) Να εξεταστεί αν υπάρχει χορδή της έλλειψης, παράλληλη στον άξονα $y'y$, η οποία έχει ως μέσο το σημείο Μ.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία τέμνει την έλλειψη στα σημεία Γ και Δ έτσι, ώστε το τμήμα ΓΔ να έχει μέσο το σημείο Μ.

5) Δίνεται η έλλειψη (C): $x^2+3y^2=24$ και ένα σημείο της M, διαφορετικό από τις κορυφές της A΄ και A. Η εφαπτομένη (ε) της (C) στο M τέμνει την ευθεία (δ): $x=6$ στο σημείο P. Αν $M(x_0, y_0)$, να αποδείξετε ότι:

i) οι συντεταγμένες του P είναι $\left(6, \dfrac{8-x_0}{y_0}\right)$,

ii) η γωνία $\widehat{MEP}$, όπου E είναι η εστία της (C) με θετική τετμημένη, είναι ορθή,

iii) καθώς το M κινείται πάνω στην έλλειψη, ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα MP διέρχεται από ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.

6) Δίνεται η έλλειψη (C): $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ και η εφαπτομένη (ε) στο σημείο M της έλλειψης, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ και τον άξονα $y'y$ στο Δ. Αν $MP\perp x'x$, να αποδείξετε ότι:

i) $OP\cdot O\Gamma=\alpha^2$

ii) $O\Delta\cdot MP=\beta^2$

iii) $\dfrac{\alpha^2}{O\Gamma^2}+\dfrac{\beta^2}{O\Delta^2}=1$.