

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

### ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- 1) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ( $\epsilon$ ):  $x+y+2=0$  και ( $\eta$ ):  $2x + 5y + 25 = 0$  εφάπτονται στην παραβολή ( $C$ ):  $y^2 = 8x$ .
- 2) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής ( $C$ ):  $x^2 = 4y$  στα σημεία της  $A(4, 4)$  και  $B(-1, \frac{1}{4})$  τέμνονται κάθετα σε σημείο που ανήκει στην διευθετούσα της.
- 3) Δίνεται η παραβολή ( $C$ ):  $y^2 = 12x$ . Η εφαπτομένη της παραβολής σε ένα σημείο της  $A$ , με τετμημένη  $x_0 = 1$ , τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο  $B$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $EAB$  είναι ισόπλευρο, όπου  $E$  είναι η εστία της παραβολής.
- 4) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής ( $C$ ), που έχει ως μέσο το σημείο  $M$ , στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) ( $C$ ):  $y^2 = 8x$ ,  $M(4, 1)$   
β) ( $C$ ):  $y^2 = 12x$ ,  $M(3, 2)$ .
- 5) Έστω  $M(x, y)$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  τα οποία:
- α) ισαπέχουν από το σημείο  $A(-2, 0)$  και την ευθεία  $x=2$ ,  
β) ισαπέχουν από το σημείο  $B(0, 4)$  και την ευθεία  $y=-4$ .
- 6) Δίνεται η παραβολή ( $C$ ):  $y^2 = -36x$  και το σημείο  $P(9, 6)$ . Από το  $P$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $PA, PB$  προς την ( $C$ ). Να αποδείξετε ότι:
- α) η  $AB$  διέρχεται από την εστία της παραβολής,  
β)  $PA \perp PB$ .

- 7) Δίνεται η παραβολή  $(C): y^2 = 2px$  και τυχαία εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  της  $(C)$ . Από την κορυφή  $O$  φέρνουμε την κάθετη  $OA$  προς την  $(\varepsilon)$ , η οποία τέμνει την  $(C)$  πάλι στο  $B$ . Να αποδείξετε ότι  $OA \cdot OB = p^2$ .
- 8) Δίνεται η παραβολή  $(C): y^2 = 4x$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ , με  $\lambda \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι:
- α) η  $(\varepsilon)$  τέμνει την  $(C)$  σε δύο διαφορετικά σημεία  $A$  και  $B$  αν και μόνο αν  $\lambda\beta < 1$ ,
- β) το μέσον  $M$  του  $AB$  είναι  $M\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda}\right)$ ,
- γ) αν  $\lambda=1$  και το  $\beta$  μεταβάλλεται, τότε το  $M$  κινείται σε μια ευθεία,
- δ) αν  $\beta=0$  και το  $\lambda$  μεταβάλλεται, τότε το  $M$  κινείται σε μια παραβολή.
- 9) Δίνεται η παραβολή  $(C): y^2 = 2px$  και ένα σημείο της  $M$ , διαφορετικό από το  $O$ . Η παράλληλη από το  $M$  προς τον άξονα  $x'x$  τέμνει την διευθετούσα στο σημείο  $A$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  της παραβολής στο  $M$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $EA$ , όπου  $E$  η εστία.
- 10) Δίνεται η παραβολή  $(C): y^2 = 4x$ . Από το σημείο  $M(-1, y_0)$  φέρνουμε προς τη παραβολή τις εφαπτόμενες  $MA, MB$ , όπου  $A, B$  τα σημεία επαφής.
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι  $yy_0 = 2(x - 1)$ .
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες τέμνονται κάθετα μεταξύ τους.
- 11) Μια ευθεία  $(\varepsilon)$  διέρχεται από την εστία της παραβολής  $(C): y^2 = 2px$  και την τέμνει στα σημεία  $A$  και  $B$ . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της  $(C)$  στα  $A, B$  τέμνονται κάθετα.
- 12) Δίνεται η παραβολή  $(C): y^2 = 2px$  και ένα σημείο της  $M$ . Η  $MO$  τέμνει τη διευθετούσα  $(\delta)$  στο  $N$ . Αν  $(\varepsilon)$  είναι η εφαπτομένη της  $(C)$  στο  $M$ , να αποδείξετε ότι  $NE \parallel \varepsilon$ .

