ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

ΚΥΚΛΟΣ

1) Έστω η εξίσωση:

$$C_\lambda: x^2 + y^2 - 4(\lambda + 2)x - 2\lambda y + 5\lambda^2 + 16\lambda + 11 = 0$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση C_λ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, με σταθερή ακτίνα.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ.

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ εφάπτονται δυο σταθερών ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Έστω οι κύκλοι

$C_1: x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ που τέμνονται στα σημεία Κ, Λ. Να δείξετε ότι:

α) η ευθεία ΚΛ έχει εξίσωση $\varepsilon: (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$

β) η ευθεία ΚΛ είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των κύκλων C_1 και C_2.

3) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους $2\alpha > 0$ και ο θετικός αριθμός k. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ στο επίπεδο, που βρίσκεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, στις περιπτώσεις:

α) $MA^2 + MB^2 = k^2$,

β) $\frac{MA}{MB} = k$, όπου $k \neq 1$.

4) Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(\lambda, 0)$, όπου $\lambda > 1$ γνωστός. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$, αν ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}^2$.

5) Έστω η γραμμή με εξίσωση $C_\kappa: x^2 + y^2 - 2\kappa x + 6\kappa y = -\kappa^2$, $\kappa \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η γραμμή C_κ παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο ευθείες που εφάπτονται σε όλους τους κύκλους C_κ για κάθε $\kappa \neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο κύκλοι της μορφής C_κ που διέρχονται το σημείο $A(1,2)$ και αν R_1, R_2 είναι οι ακτίνες τους ($R_1 > R_2$), τότε ισχύει $\frac{R_1}{R_2} = 9 + 4\sqrt{5}$.

6) Έστω οι κύκλοι

C_1: $x^2 + y^2 = 20$ και C_2: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων.

β) Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται σε δυο σημεία Α, Β, όπου η χορδή ΑΒ είναι διάμετρος στον κύκλο C_2.

γ) Να βρείτε την οξεία γωνία των εφαπτομένων των κύκλων C_1 και C_2 στο σημείο Α.

7) Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(2,1)$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ, για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{M\Gamma}^2$.

8) Έστω ο κύκλος C : $x^2 + y^2 = 41$ και το σημείο του $A(5,4)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(\lambda, 2-\lambda)$ να απέχει από την εφαπτομένη του κύκλου στο Α απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

9) Έστω οι κύκλοι

C_1: $(x-\alpha)^2 + (y-1)^2 = \rho^2$ και C_2: $x^2 + (y-\alpha)^2 = \rho^2$ καθώς και η ευθεία ε: $4x + 3y + 2 = 0$.

α) Αν η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C_1, να βρείτε την ακτίνα ρ συναρτήσει του α.

β) Αν η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1, C_2, να βρείτε τις τιμές των α, ρ.

10) Έστω $\varphi \in [0, 2\pi]$ και η εξίσωση C: $x^2 + y^2$=$2(\sigma\upsilon\nu\varphi)x + 2(\eta\mu\varphi)y$. Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση C παριστάνει κύκλο,

β) το κέντρο του κύκλου C ανήκει σ' ένα ορισμένο κύκλο για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi]$,

γ) η ευθεία ε: $x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi = 2$ εφάπτεται στον κύκλο C.

11) Αν οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = \rho^2$ και $C_2: (x-2)^2 + (y+4)^2 = \rho^2$ εφάπτονται, να βρείτε:

α) την ακτίνα ρ,

β) κάθε σημείο Μ της ευθείας $\varepsilon: 2x + 7y = 0$, από το οποίο οι εφαπτομένες προς τον κύκλο C_1 να είναι κάθετες.

12) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του ακεραίου λ, ώστε η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 4x + 2(\lambda + 6)y + \lambda^2 + 30 = 0$ να παριστάνει κύκλο.

13) Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB} = (4, 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1, 7)$.

α) Να βρείτε το $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

γ) Αν η κορυφή Α κινείται πάνω στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 4$, να δείξετε ότι και το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ κινείται πάνω σε ένα ορισμένο κύκλο.

14) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, με $B \neq 2A$, εφάπτεται σε δυο ίσους κύκλους συγχρόνως, που έχουν κέντρα τα σημεία Κ$(4, 0)$ και $\Lambda(0, 2)$.

α) Να δείξετε ότι $2A + B + G = 0$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο, ανεξάρτητο δηλαδή των Α, Β, Γ.