ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ 1

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου αυτού τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΑΛΚΓ και ΒΓΝΜ. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{\mathrm{E\Lambda}} + \overrightarrow{\mathrm{KN}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = \vec{0}$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ME}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

ii) το Β είναι μέσο του ευθ. τμήματος ΕΔ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Ορίζουμε το σημείο Μ από την σχέση: $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| \leq 2$ και $|\vec{\beta}| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3$

ii) $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \leq 4$.

iii) $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \leq 7$.

5. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $3|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 9$, $3|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - 7|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 2$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ και τα σημεία Α, Β, Γ, Ο. Αν

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 11\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι:

i) $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$**,**

ii) τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι αριθμοί $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \nu\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \nu\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{\Delta E} \parallel \mathrm{B\Gamma}$.

8. Σε ένα κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ αντίστοιχα. Αν Η,Ζ είναι τα μέσα των ΚΜ και ΛΝ, να αποδειχθεί ότι και $\mathrm{HZ} \parallel \mathrm{AE}$.

9. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, με Α(1, 2), Β(3, 4), Γ(5, 4) και Δ(3, -2). Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ, παίρνουμε τμήμα ΓΕ έτσι, ώστε ΒΓ=2ΓΕ. Αν Κ, Λ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{K\Lambda} \perp \mathrm{NE}$.

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\gamma}=(1, 2)$ και $\vec{\delta}=(4, 3)$.

i) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{\delta}$ πάνω στο $\vec{\gamma}$.

ii) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\delta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma}$.

11. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{u}=(-9, 19)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}=(5, -3)$.

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι προβολές Ε, Ζ του Δ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AZ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2 .$$

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ του επιπέδου, με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 1$. Να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\vec{x}$, για το οποίο ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

14. Εστω δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $x^2+y^2=25$. Να αποδειχθεί ότι: $|6x-8y|\leq 50$.

15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{\mathrm{A}}=90^\circ)$, το ύψος του ΑΔ και η διάμεσος του ΑΜ. Αν Ε, Ζ είναι αντίστοιχα οι προβολές του Δ στις ευθείες ΑΒ, ΑΓ, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AM}\perp\mathrm{EZ}$.

16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{\mathrm{A}}=90^\circ)$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ=2ΔΓ. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\gamma}$, τότε:

i) να εκφραστούν τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

17. Στην πλευρά ΑΒ ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ=2ΕΒ και στην πλευρά ΒΓ σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΓΔ=4ΔΒ. Να αποδειχθεί ότι:

i) $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}+2\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}{3}$

ii) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+4\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{5}$

iii) τα τμήματα ΑΔ και ΓΕ τέμνονται κάθετα.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 6,\ \gamma = 4$ και $\widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

i) να υπολογιστεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$,

ii) να αποδειχθεί ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ είναι το διάνυσμα $\dfrac{14}{19}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2$,

ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

20. Αν ΑΔ είναι το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, $\overline{\mathrm{A}} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}$.

21. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Μ του επιπέδου του. Αν μια μεταβλητή ευθεία, που διέρχεται απο το Μ, τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β, να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ είναι σταθερό.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύει:
$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο,

ii) το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

23. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 4\vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

24. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα του επιπέδου, με: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Μ.