

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^7 + 27x^4 = 0$$

$$ii) x^7 - 8 = x^3 - 8x^4$$

$$iii) (x^2 - 5)^4 - 256 = 0$$

$$iv) (3x - 1)^4 + 8 = 24x$$

$$v) x^2 - |-3x| + 2 = 0$$

$$vi) 2(x - 3)(x + 3) + 9|x| = 0$$

$$vii) x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$viii) x^6 - 16x^3 + 64 = 0$$

$$ix) x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$x) \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x-3}{2} - 18 = 0$$

$$xi) (x^2 + 2x - 6)^2 + 3(x^2 + 2x - 6) - 10 = 0$$

$$xii) (2x - 1)^2 - 8|2x - 1| + 15 = 0$$

$$xiii) \frac{x-10}{x^2-4} - \frac{x}{2-x} = \frac{2}{x+2}$$

$$xiv) \frac{x}{1-\frac{1}{x}} - \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$xv) \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} - \frac{\frac{4}{x}-1}{2} = \frac{7}{3}$$

$$\text{xvi)} (2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = 0$$

$$\text{xvii)} 4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \frac{8x+8}{x-1} + 3 = 0$$

$$\text{xviii)} \frac{8}{x^2 + 4x} - x^2 - 4x = 2$$

$$\text{xix)} x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{xx)} x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση: $(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

3. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 + (2\lambda + 1)x + |6 - 3\lambda| = 0$. (1)

i) Να βρείτε το λ , αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα το -1 .

ii) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο i) θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$ (2). Να βρείτε το μ ώστε η εξίσωση (2) να έχει διπλή ρίζα.

4. Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0$ (1) έχει δύο ρίζες άνισες, από τις οποίες η μία είναι η $x=1$.

i) Να βρείτε το λ .

ii) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \sqrt{\lambda + 3} \cdot x + \lambda = 0$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. .

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$.

6. Η εξίσωση: $x^2 + \lambda\sqrt{2} \cdot x - \mu(\mu - \lambda) - \left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

ii) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), τότε:

α) να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + (\rho - 1)x - \rho = 0$

β) να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

7. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0$ (1) και $x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$ (2) με

$\lambda \neq -1$. Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν κοινή ρίζα τον αριθμό ρ , τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς ρ και λ ,

ii) να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2),

iii) να λύσετε την εξίσωση: $|x + \rho| = x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lambda} \cdot x + \rho$.

8. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση $2^{\text{ου}}$

βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

i) $2x_1$ και $2x_2$

ii) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

9. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1).

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

ii) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

α) ρίζες αντίθετες, β) ρίζες αντίστροφες.

10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

i) $4 - 5(x - 2) \geq 13 - 3(x + 1)$ και $1 - \frac{7 - x}{4} > \frac{x}{2}$

ii) $|x - 3| < 5$ και $|x - 5| \geq 1$.

11. Να λύσετε την ανίσωση $1 - 2(2x + 1) \leq 5 - 2x < 4 - \frac{8x - 7}{3}$. Ποιες είναι οι ακέραιες

λύσεις της;

12. Να λύσετε την ανίσωση $2(\lambda - x) \leq \lambda x - \lambda(2x - \lambda)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x - 2| \geq |x + 3|$

ii) $|x + 3| - |2 - x| - 2x > 7$

iii) $||2x - 1| - 3| < 2$.

14. Δίνεται η παράσταση: $A = |x^2 + 4| + ||x| + 5| - |x^2 + 6x + 9| - |-x^2|$.

i) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $A \leq 35 - x^2$.

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 = 0$ και έστω x_1, x_2 οι ρίζες της.

i) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$ και $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

ii) Για τις τιμές των παραστάσεων που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση:

$|x + A| \leq |x - P| < S$.

16. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$$

$$\frac{2x^2 - ax + 2x - a}{2x^2 + ax - a^2}$$

$$\frac{\lambda^2 - 5\kappa\lambda + 4\kappa^2}{2\kappa^2 - \kappa\lambda - \lambda^2}$$

$$\frac{x^2 - ax + \beta x - a\beta}{3\beta^2 + \beta x - 2x^2}$$

17. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{lll} x^2 > 9 & x^2 - 6 \leq 0 & x^2 + 4 > 0 \\ x^2 + 16x + 64 \geq 0 & x^2 + 5x + 7 \leq 0 & -3x^2 + 10x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 15x \geq 0 & 2x^2 - 4x + 5 > 0 & x^4 \leq 16 \end{array}$$

18. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$(x-5)(x^2+1)(x^2-36) < 0 \quad (8+2x-x^2)(x^2-6x+9) \leq 0 \quad \frac{x-3}{x+2} > 0$$

$$\frac{3x-1}{x+\sqrt{2}} \leq 0 \quad \frac{1}{x^2-11x+10} \geq 0 \quad \frac{9x^2-18x+5}{x^2-16} \geq 0 \quad \frac{-5}{x-x^2} > 0$$

$$\frac{2+x-x^2}{2x^2-3x+1} \leq 0 \quad \frac{x}{x-2} > 1 \quad \frac{15}{x+2} \leq x \quad \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} \geq \frac{3x-10}{4}$$

$$\frac{x^2-7+12}{x^2-10x+20} < 0 \quad \frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3} \quad \frac{1}{x} < x \quad \frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{x+4}{2x+5}$$

$$\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-1}{x^3+1} \quad \frac{2}{2-x} + \frac{3}{2+x} \geq \frac{4x}{4-x^2} \quad \frac{x+2}{x^3-x^2} \geq \frac{2x+1}{x^3+3x^2}$$

19. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 20 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} > 0 \\ 2x^2 - 5x - 12 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} > 1 \\ 16 - x^2 \geq 0 \\ 2x^3 + 5x^2 \geq 0 \end{cases} \quad 1 - x > 1 - x^2 > 1 - x^3$$